

134. Misure di ortogonalità di poligoni desunti da dati territoriali

Maurizio Rosina, Antonio Bottaro, Fabrizio Minuti
Sogei – Società Generale di Informatica – Roma

Introduzione

Operando su dati di sintesi vettoriali rappresentati da poligoni monociclici piani non intrecciati desunti da dati territoriali, si vuole proporre un metodo che ne permetta un loro ordinamento sulla base di una misura correlata alle perpendicolarità insite nella loro forma; ovvero ne permetta un ordinamento sulla base di una metrica che fornisce una misura (normalizzata) della distanza tra ciascun poligono originario ed un corrispondente poligono ortogonale che lo approssima. Il calcolo della misura della distanza verrà sviluppato sulla base di poligoni ortogonali, denominati nel seguito Orthogonal Bounded Polygons – OBP, che approssimano i poligoni originari. Verranno proposte due diverse tipologie di OBP: gli Orthogonal Bounded Wrapped Polygons – OBWP, ottenuti tramite operazioni locali condotte sui singoli spigoli di ciascun poligono originario e gli Orthogonal Bounded convex Hull Polygons – OBHP, che avranno le caratteristiche di contenere al proprio interno sia tutte le concavità presenti nei poligoni originari che i rispettivi poligoni OBWP. L'applicazione di una metrica rigorosa a specifiche coppie di poligoni permetterà inizialmente di giungere a determinare quanto ciascun poligono ortogonale OBWP è distante rispetto al poligono originario. Successivamente, il calcolo della misura della distanza tra i poligoni OBWP e OBHP relativi ad uno stesso poligono originario, permetterà di avere conoscenza di quanto l'aver voluto includere tutte le concavità presenti nel poligono originale nel poligono OBHP ha comportato in termini di distanza tra i due poligoni OBHP e OBWP. Tutte le tecniche proposte, sia per il calcolo dei poligoni ortogonali associati ai rispettivi poligoni originali che in merito alla metrica adottata, sono state individuate con lo scopo di poter essere implementate tramite un kernel applicativo che fruisce di funzionalità ed algoritmi standard - o di facile implementazione - di manipolazione di poligoni, ovvero di algoritmi e metodi robusti, molti dei quali già presenti nei principali package geometrico/cartografici.

Gli Orthogonal Bounded Polygons

La tecnica utilizzata per ottenere un poligono ortogonale che approssima un poligono originario monociclico orientato e non intrecciato, è stata quella di calcolare per ciascuno spigolo del poligono originario il relativo minimo box di contenimento orientato [3]. Per *minimo box di contenimento orientato di uno spigolo* si intende il minimo rettangolo contenente lo spigolo, che presenta i quattro lati rispettivamente paralleli agli assi del sistema di riferimento e che risulta essere orientato in verso antiorario (Minimum Bounding Oriented Rectangle – MBOR) [cfr. Figura 1].

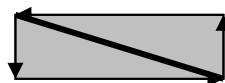


Figura 1 - esempio di MBOR di uno spigolo

Dato un poligono originale monociclico orientato e non intrecciato p , composto da n vertici ed $e_i, i=1,n; n \geq 3$ spigoli, la procedura utilizzata nel calcolo del poligono ortogonale $OBWP(p)$ che lo approssima e che sempre lo contiene risulta la seguente [cfr. Figura 2]:

- calcolare il minimo box di contenimento orientato $MBOR(e_i)$ per ciascuno spigolo e_i , escludendo dal calcolo gli spigoli che risultano già essere paralleli agli assi del sistema di riferimento;
- calcolare il poligono unione di tutti gli $MBOR$ calcolati: $SBOX = \cup_{i=1,k} MBOR(e_i); k \leq n$;
- calcolare il poligono $OBWP(p)$ come unione tra il poligono originario p e il poligono $SBOX$: $OBWP(p) = p \cup SBOX$.

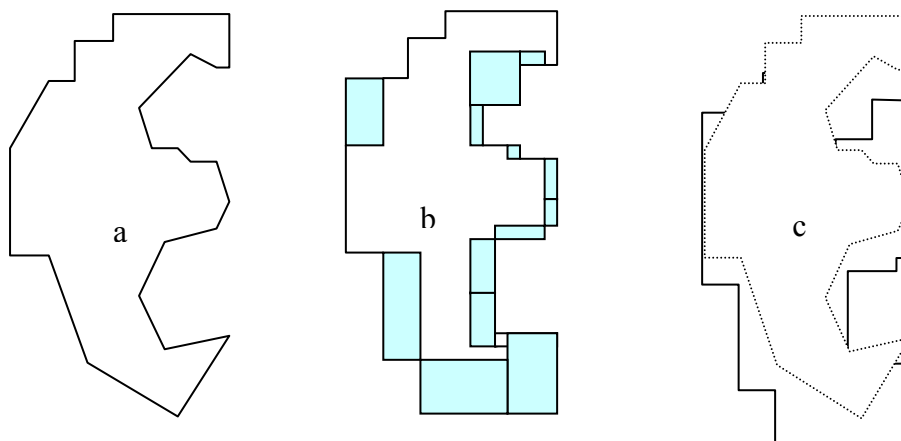


Figura 2 – a) il poligono originario; b) i box di contenimento costruiti sugli spigoli; c) il poligono ortogonale $OBWP$ risultante, sempre contenente il poligono originario

Nel caso di presenza di spigoli del poligono originario paralleli agli assi coordinati il poligono $SBOX$ può divenire un poligono policiclico composto da più isole. Si noti, inoltre, che qualora il poligono originario p sia già totalmente ortogonale, il poligono $OBWP(p)$ risulta essere uguale al poligono originario. Inoltre il poligono $OBWP(p)$, che può risultare anche policiclico con laghi/buchi (holes) al proprio interno, ha la proprietà di contenere sempre il poligono originario, ovvero: $p \subseteq OBWP(p)$.

Una seconda tipologia di poligoni ortogonali è quella che abbiamo definita come *Orthogonal Bounded convex Hull Polygons* – $OBHP$. Dato un poligono originario p del quale abbiamo calcolato il relativo $OBWP(p)$, vogliamo giungere ad individuare un ulteriore poligono ortogonale, che chiameremo $OBHP(p)$, che contenga sempre sia tutte le eventuali concavità presenti nel poligono originale che il poligono $OBWP(p)$.

Dato un poligono originale monociclico, orientato e non intrecciato p , composto da n vertici, con $n \geq 3$, la procedura per ottenere il poligono $OBHP(p)$ risulta essere la seguente:

- calcolare il poligono convex-hull $H(p)$ sulla base dei vertici del poligono originario p ;
- calcolare il poligono $OBWP$ del poligono convex-hull appena ottenuto, applicando i passi a, b e c precedentemente descritti al poligono $H(p)$, ovvero $OBHP(p) = OBWP(H(p))$.

Il poligono $OBHP(p)$ così ottenuto ha la caratteristica di contenere sempre il poligono $OBWP(p)$ [cfr. Figura 3], ovvero $OBWP(p) \subseteq OBHP(p)$, valendo l'eguaglianza nel caso il poligono originario sia un poligono convesso. Infatti se il poligono originario è un poligono convesso, il

suo convex-hull risulta essere il poligono stesso, ed i poligoni ortogonali $OBWP(p)$ e $OBHP(p)$ risultano anch'essi tra loro uguali. Si noti, inoltre, che il poligono $OBHP(p)$ assorbe - ovvero contiene sempre al proprio interno -, eventualmente esaltandone l'area, le concavità presenti nel poligono $OBWP(p)$.

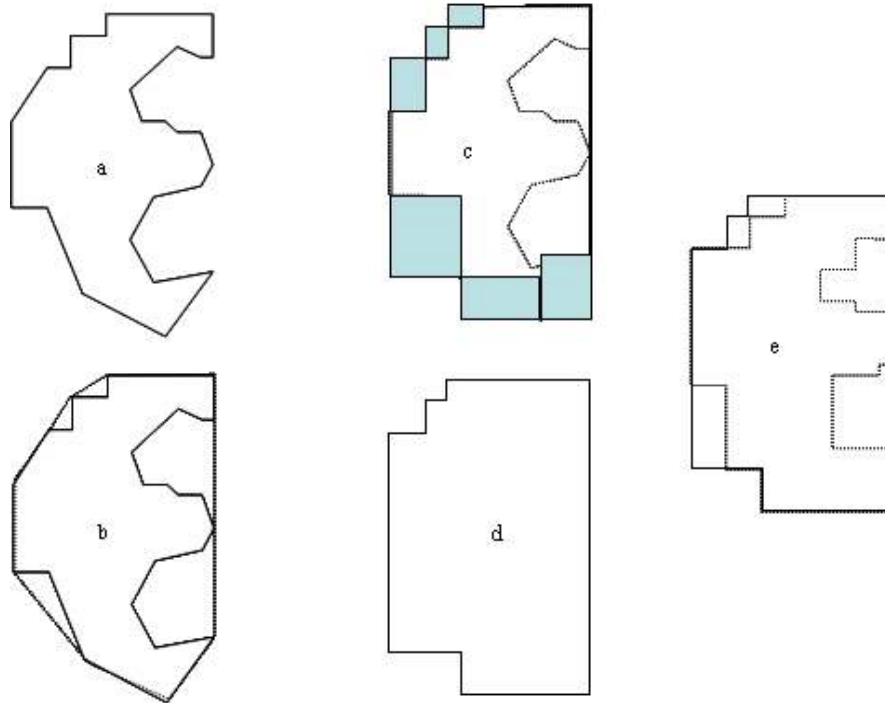


Figura 3 - a) il poligono p originario; b) il convex-hull di p , ovvero $H(p)$; c) la costruzione del poligono $OBWP(H(p))$ contenente il poligono originario; d) il poligono $OBHP(p)$ ottenuto; e) il poligono $OBHP(p)$ con evidenziato all'interno il poligono $OBWP(p)$

Il poligono $OBHP(p)$ si propone quindi come una *semplificazione*, sempre ortogonale, del poligono $OBWP(p)$ [cfr. Figura 3 - e)].

Verifica e validità di predicati calcolati sugli OBWP

Le tecniche di verifica di predicati su oggetti *semplificati* che approssimano l'oggetto originale, con i risultati immediatamente validi anche per gli oggetti originali, sono estremamente diffuse. Si pensi, ad esempio, alla tecnica di verifica della possibile intersezione tra segmenti di retta attuata tramite semplici confronti operati sui relativi rispettivi minimi box di contenimento. Utilizzeremo tali tecniche, applicate ai poligoni $OBWP$ e $OBHP$ per ottenere risultati validi anche per i rispettivi poligoni originali.

Dati due poligoni p e q , qualora risultasse verificato che $OBWP(p) \cap OBWP(q) = \emptyset$, ne conseguirebbe che sicuramente $p \cap q = \emptyset$. Quindi se risulta *verificato* il predicato di intersezione vuota tra i $OBWP$ di due poligoni qualsiasi, tale predicato risulta anche *automaticamente verificato* per l'intersezione dei due poligoni originali, ciò in quanto i due $OBWP$ contengono sempre i due rispettivi poligoni originari. Viceversa qualora risultasse che $OBWP(p) \cap OBWP(q) \neq \emptyset$, i poligoni originari p e q sarebbero solamente *candidati* ad avere anch'essi intersezione non vuota. Inoltre qualora risultasse verificato che la differenza simmetrica tra il poligono p ed il poligono $OBWP(p)$ fosse l'insieme vuoto, ovvero $p \Delta OBWP(p) = (p - OBWP(p)) \cup (OBWP(p) -$

$p) = \emptyset$ ne conseguirebbe l'eguaglianza tra il poligono originario e il corrispondente $OBWP(p)$, ovvero l'essere il poligono originario già ortogonale. Viceversa, qualora la differenza simmetrica risultasse diversa dall'insieme vuoto, ovvero $p \Delta OBWP(p) \neq \emptyset$ ciò indicherebbe la presenza di parti non comuni tra il poligono p originario ed il corrispondente poligono ortogonale $OBWP(p)$, ovvero indicherebbe che i due poligoni sono *differenti*. Proprio una *misura* normalizzata di tale differenza verrà nel seguito utilizzata per l'ordinamento dei poligoni originari.

Sulla coppia di poligoni $OBWP(p)$ e $OBHP(p)$ possono, infine, essere condotte e valgono considerazioni del tutto analoghe a quelle formulate per la coppia dei poligoni p e $OBWP(p)$ in merito ai predicati di intersezione e di differenza simmetrica.

L'Orientamento del Poligono Originario

L'intento è quello di giungere a poligoni $OBWP$ che replichino, quanto più possibile, i parallelismi e le perpendicolarità tra gli spigoli che risultano già presenti nel poligono originale. D'altronde la costruzione dei poligoni $OBWP$ è dipendente dagli orientamenti dei poligoni originari, ovvero da quanti e quali spigoli dei poligoni originali risultano paralleli agli assi coordinati. A tal fine è conveniente premettere al calcolo dei poligoni $OBWP$ e $OBHP$ una fase che permetta di individuare un nuovo orientamento, tramite una opportuna rotazione, del poligono originale. Un criterio per l'individuazione della rotazione da applicare al poligono originario è quello di individuare un nuovo orientamento del poligono originale rispetto al quale risulti massima la somma delle lunghezze degli spigoli del poligono perpendicolari e paralleli agli assi coordinati. Individuato tale angolo α di rotazione, la matrice $R(-\alpha)$ sarà quella da applicarsi alle coordinate del poligono p originario, espresse come vettori riga in coordinate omogenee normalizzate, per ottenere il voluto nuovo orientamento del poligono originario (cfr. Nota 1). Il poligono $p^* = pR(-\alpha)$ risulterà quindi quello ruotato in modo ottimale al fine di poter successivamente giungere a costruire un poligono ortogonale $OBWP(p^*)$ che replichi, quanto più possibile, i parallelismi e le perpendicolarità tra gli spigoli che risultano già presenti nel poligono originale.

L'Orientamento degli Orthogonal Bounded Polygons

I poligoni $OBWP(p^*)$ e $OBHP(p^*)$, costruiti sul poligono originario opportunamente ruotato, devono comunque essere assoggettati ad una trasformazione di rotazione uguale ed opposta per posizzarli coerentemente al poligono originario. [cfr. Figura 4].

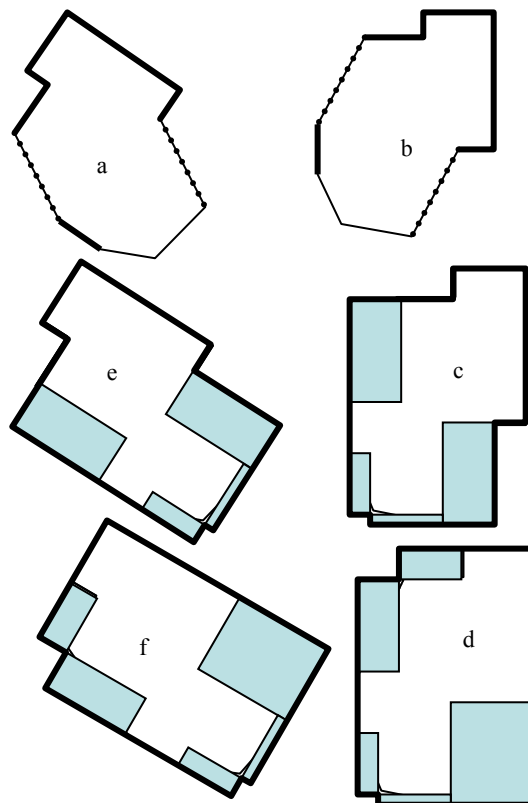


Figura 4 - a) il poligono originario con evidenziati gli spigoli tra loro paralleli ed ortogonali; b) il poligono originale ruotato; c,d) la costruzione dei poligoni $OBWP(p^*)$ e $OBHP(p^*)$; e,f) i poligoni $OBWP(p^*)$ e $OBHP(p^*)$ ruotati tramite la matrice di rotazione inversa della precedente, quindi orientati coerentemente con il poligono originario

Essi divengono, quindi, poligoni che hanno la proprietà di presentare spigoli tra loro tutti paralleli o perpendicolari, ed i predicati precedentemente individuati sulle varie coppie di poligoni originali e rispettivi poligoni ortogonali $OBWP$ e $OBHP$, continuano a valere anche quando i poligoni $OBWP$ e $OBHP$ sono coerentemente orientati come i rispettivi poligoni originari, ciò in quanto continuano a valere le proprietà che il poligono originario è sempre contenuto nel proprio $OBWP$ e che il poligono $OBWP$ è sempre contenuto nel proprio $OBHP$, ovvero che $P \subseteq OBWP(p) \subseteq OBHP(p)$.

Per tali ragioni nel seguito si utilizzerà la dizione di poligoni $OBWP(p)$ e $OBHP(p)$ sia che tali poligoni siano effettivamente ortogonali, sia che siano solamente poligoni con spigoli tutti tra loro paralleli e perpendicolari coerentemente orientati come i rispettivi poligoni originari. Ovvero la dizione di poligoni $OBWP(p)$ e $OBHP(p)$ comprenderà sempre impliciti i vari processi relativi:

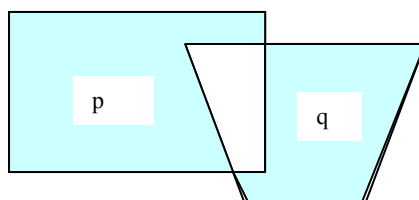
- all'orientamento del poligono originario in modo da massimizzarne, rispetto agli assi coordinati, i parallelismi e le perpendicolarità presenti nella forma;
- alla creazione, sul poligono originale ruotato, dei due poligoni ortogonali $OBWP$ e $OBHP$;
- all'orientamento dei due poligoni ortogonali $OBWP$ e $OBHP$ in modo coerente con il poligono originario.

La metrica

Il concetto di metrica in matematica è strettamente correlato al concetto di distanza. Dati due poligoni p e q è possibile definirne una distanza così definita:

$$d(p, q) = \text{area}((p - q) \cup (q - p)) / \text{area}(p \cup q)$$

La distanza $d(p, q)$ è data quindi dal valore (normalizzato nell'intervallo $[0 \dots 1]$, estremi compresi) della somma delle aree delle parti non comuni dei due poligoni p e q , essendo le parti non comuni ottenibili tramite l'operatore di differenza simmetrica tra i due poligoni [cfr. Figura 5].



$$p \Delta q = (p - q) \cup (q - p)$$

Figura 5 – La differenza simmetrica tra due poligoni

Tale metrica è conosciuta come *Normalized Area of Symmetric Differences* – NASD [2], ed è una metrica effettiva in quanto, per ogni possibile scelta di tre poligoni qualsiasi p , q e z , la distanza sopra definita soddisfa le proprietà di:

- non negatività: $d(p, q) \geq 0$;
- uguaglianza ed unicità: $d(p, q) = 0$ se e solo se $p = q$;
- simmetria: $d(p, q) = d(q, p)$;
- validità della disuguaglianza triangolare: $d(p, q) \leq d(p, z) + d(q, z)$.

La NASD presenta, inoltre, ulteriori caratteristiche, assai importanti soprattutto qualora debba essere utilizzata nel contesto di poligoni ottenuti da dati rilevati ed affetti da rumore e/o da imprecisione e/o inaccuratezza nella presa. In particolare tale metrica possiede le caratteristiche di essere poco sensibile a piccole variazioni nel bordo dei poligoni e di essere invariante rispetto a trasformazioni di rotazione, traslazione e di scala.

L'utilizzo della metrica sugli Orthogonal Bouded Polygons

Dato un insieme composto da poligoni piani, monociclici, orientati e non intrecciati, la metrica NASD applicata alle varie coppie composte dal poligono originale e dal suo corrispondente poligono ortogonale OBWP, permette di ordinare i poligoni sulla base delle rispettive distanze rilevate, in un intervallo di valori di distanza normalizzato tara $[0 \dots 1]$, estremi compresi; con la distanza interpretabile come la misura della mancanza di ortogonalità (*orthogonal deficiency*) del poligono originale rispetto al poligono OBWP¹. Ad una distanza $d(p, \text{OBWP}(p)) = 0$ corrisponde una eguaglianza tra i due poligoni, in quanto vi è assenza di parti non comuni. Il crescere della

¹ La dizione di *orthogonal deficiency* è stata mutuata dalla definizione di *convex deficiency*. Dati un poligono p ed il corrispondente poligono $H(p)$ rappresentativo della sua copertura convessa, la *convex deficiency* del poligono p , indicata come $D(p)$, è definita come $D(p) = H(p) - p$. Nel nostro caso la *orthogonal deficiency* del poligono p rispetto al poligono $\text{OBWP}(p)$, indicata come $\text{OW}(p)$, è calcolata come la differenza tra i due poligoni, ovvero $\text{OW}(p) = \text{OBWP}(p) - p$. Si noti che mentre la *convex deficiency* è univocamente definita per un poligono, altrettanto non vale per la *orthogonal deficiency*, in quanto il poligono OWBP non risulta essere la univoca minima copertura ortogonale del poligono originario.

distanza sarà dovuto ad un crescere della consistenza (dell'area) delle parti non comuni tra i due poligoni, sino a poter teoricamente giungere ad un valore massimo della distanza, eguale ad 1, indicativo di due poligoni disgiunti, ovvero tutti composti di parti non comuni. Tale valore massimo è, nel nostro caso, un valore solamente teorico; infatti i poligoni a cui verrà applicata la NASD saranno sempre poligoni per i quali varrà che $p \subseteq OBWP(p) \subseteq OBHP(p)$, ovvero non potranno sussistere, nel nostro caso, poligoni disgiunti.

La differenza simmetrica, su cui si basa la NASD, applicata ai poligoni p e $OBWP(p)$ risulta $p\Delta OBWP(p) = (p - OBWP(p) \cup OBWP(p) - p)$, che si riduce al solo secondo termine $OBWP(p) - p$ ricordando che p è sempre contenuto in $OBWP(p)$, ovvero che $p \subseteq OBWP(p)$, da cui ne discende che $p\Delta OBWP(p) = OBWP(p) - p$. La distanza calcolata tramite la NASD quindi diviene $d(p, OBWP(p)) = (\text{area}(OBWP(p)) - \text{area}(p)) / \text{area}(OBWP(p))$. Il valore $d(OBWP(p), p) * 100$ nel nostro caso quindi rappresenta la differenza percentuale di area tra $OBWP(p)$ e p , ovvero la variazione in percentuale subita dell'area del poligono originario nella sua trasformazione nel poligono ortogonale $OBWP(p)$. Discorso analogo può essere condotto per la coppia di poligoni $OBHP(p)$ e $OBWP(p)$. La $d(OBHP(p), OBWP(p)) * 100$ rappresenta la differenza percentuale di area tra $OBHP(p)$ e $OBWP(p)$.

In ciascun sottoinsieme una distanza notevole tra il poligono $OBHP(p)$ ed il rispettivo $OBWP(p)$ sarebbe, quindi, indicativa della possibilità di utilizzare il poligono $OBHP(p)$ solamente a scale di presentazione molto piccole, ovvero a scale rappresentative di grandi porzioni di territorio, potendo a tali scale essere in ogni caso efficace la rappresentazione del manufatto tramite il poligono semplificato $OBHP(p)$. La presenza di distanze assai contenute tra il poligono p ed il poligono $OBWP(p)$ e tra tale poligono ed il poligono $OBHP(p)$ indicherebbe, viceversa, la possibilità di utilizzare direttamente il poligono $OBHP(p)$ a qualsiasi scala di rappresentazione. Sia nel caso dei poligoni $OBWP$ che dei poligoni $OBHP$ in ogni caso è garantito che i predicati in merito ad intersezioni e differenze simmetriche, risultano validi anche per i rispettivi poligoni originari (ad es. se due $OBHP$ non si intersecano, non si intersecano i due rispettivi $OBWP$ e non si intersecano neppure i due rispettivi poligoni originali).

Nel seguito verranno proposti i risultati di una sperimentazione condotta su poligoni monociclici semplici, desunti da dati territoriali. Sui poligoni in esame verrà operata una sorta di classificazione lessicografica, ordinandoli inizialmente in più sottoinsiemi sulla base di più intervalli di valori di distanza tra i poligoni originari ed i rispettivi poligoni $OBWP$, e successivamente, nell'ambito di ciascun sottoinsieme, ordinandoli ulteriormente sulla base della distanza tra i rispettivi poligoni $OBHP$ e $OBWP$ (cfr. Nota 2).

I Risultati Ottenuti

L'elaborazione è avvenuta su di un campione composto da 185.932 poligoni desunti da dati territoriali, ovvero su di un campione composto da poligoni aventi forme prossime a quelle con le quali vengono descritti e/o rilevati i manufatti localizzati sul territorio. Le immagini riportate nel seguito [cfr. Figura 6 e Figura 7] presentano graficamente i risultati conseguiti su alcuni dei poligoni elaborati.

² Si noti come, nel nostro caso, la differenza simmetrica risulti eguale a quella che è stata precedentemente denominata come *orthogonal deficiency* del poligono originario p rispetto al poligono $OBWP(p)$, infatti $p\Delta OBWP(p) = OBWP(p) - p = OW(p)$, e quindi come la misura della distanza tra i poligoni p e $OBWP(p)$ tramite la NASD fornisca una misura della mancanza di ortogonalità del poligono originario *rispetto al poligono* $OBWP(p)$.

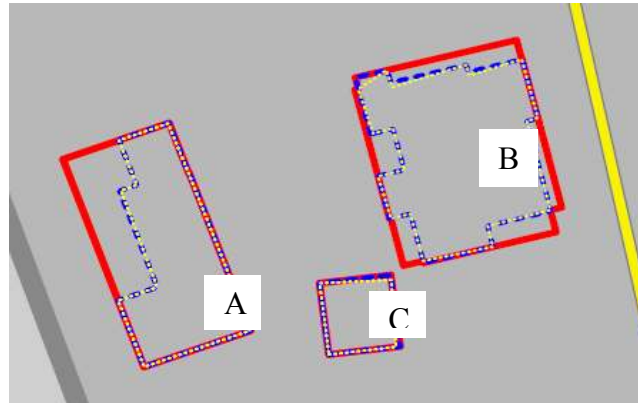


Figura 6 – una visione di sintesi, a piccola scala, di alcuni poligoni originali (bordo in colore giallo puntinato) con sovrapposti i rispettivi poligoni OBWP (bordo blu tratteggiato) e OBHP (bordo rosso); il dettaglio dei manufatti A, B e C è proposto nella figura successiva.

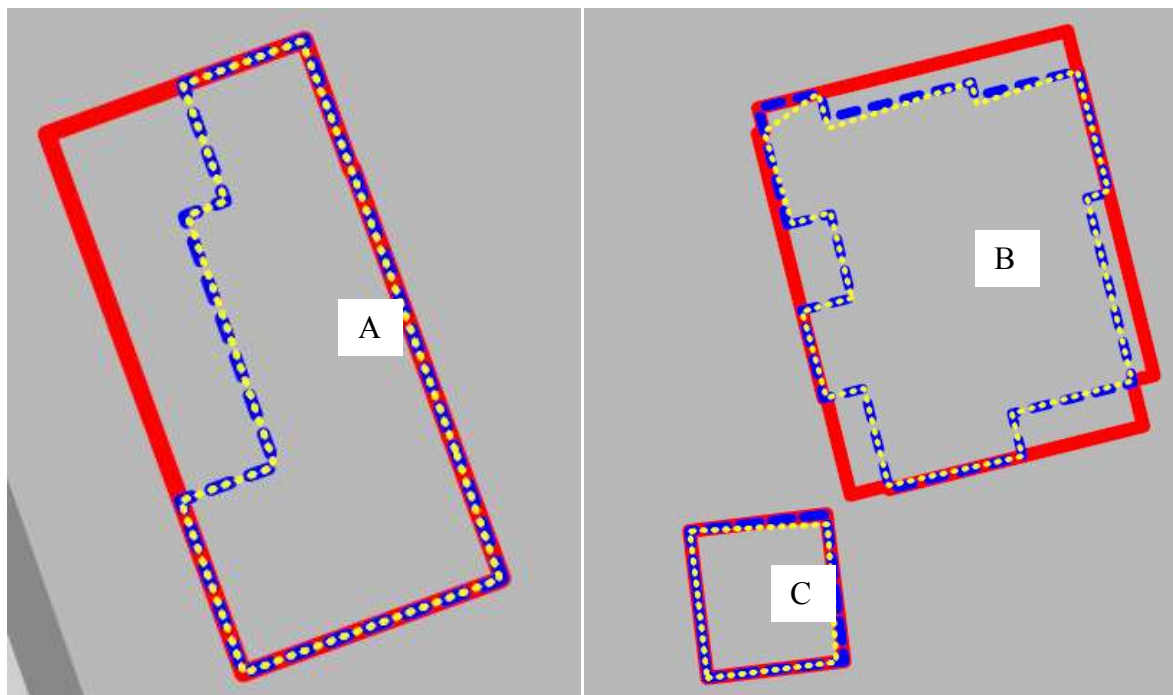


Figura 7 – una visione di sintesi, a grande scala, di tre poligoni originali (bordo giallo puntinato) con sovrapposti i relativi OBWP (blu tratteggiato) e OBHP(rosso).

Per giungere a definire un ordinamento e classificazione dei poligoni sulla base della metrica adottata, si sono inizialmente calcolate le distanze $d(p,OBWP(p))$ e $d(OBHP(p),OBWP(p))$. Il calcolo delle distanze tra i poligoni originari e i rispettivi poligoni OBWP sul campione ha evidenziato [cfr. Figura 8] che circa 58.000 poligoni OBWP presentano una distanza dai poligoni originari minore o uguale a 0,02, ovvero propongono una variazione percentuale subita dell'area del poligono originario nella sua trasformazione nel poligono ortogonale $OBWP(p)$ minore o uguale al 2%, e complessivamente circa 170.000 poligoni rientrano in una variazione percentuale dell'area minore o uguale al 15%.

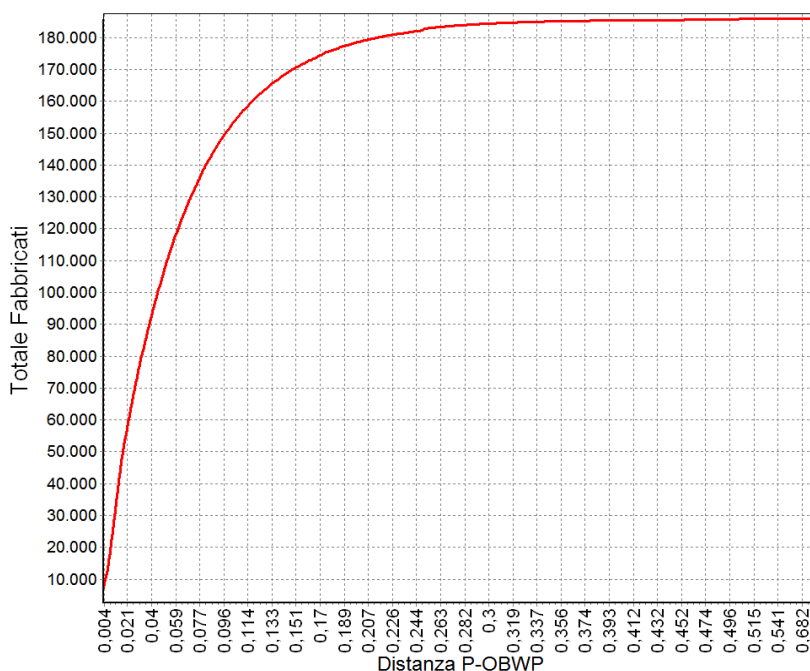


Figura 8 – le distanze tra i poligoni originali e i rispettivi OBWP

Il calcolo delle distanze tra i poligoni OBWP e i rispettivi poligoni OBHP ha evidenziato [cfr. Figura 9] che oltre 100.000 poligoni OBHP presentano una distanza dai rispettivi poligoni OBWP bel al disotto del valore 0,02, ovvero propongono una variazione percentuale subita dell'area del poligono OBWP nella sua trasformazione nel poligono OBHP minore del 2%. Superata tale soglia di numerosità la distanza cresce molto velocemente, permanendo comunque al di sotto di una soglia del 15,1% sino ad una numerosità di circa 150.000 poligoni.

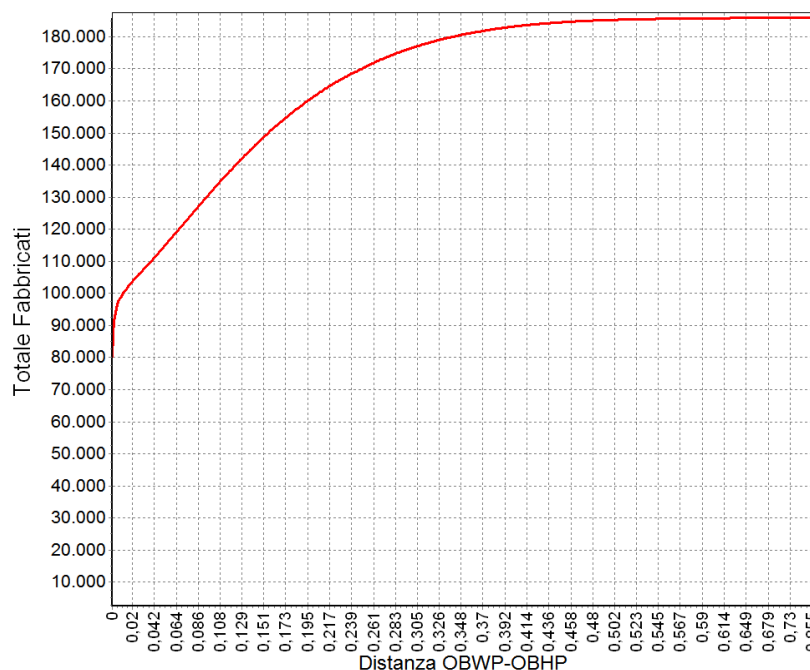


Figura 9 – le distanze tra i poligoni OBWP e i rispettivi OBHP

Una prima disamina dei risultati precedenti permette di affermare che qualora l'ente detentore del dato originario ammettesse una soglia di tolleranza nella variazione dell'area sino al 2%, oltre il 31% dei poligoni originari del campione potrebbe essere sostituito con i rispettivi poligoni OBWP, e qualora l'ente ammettesse una tolleranza di variazione dell'area sino al 15%, oltre il 90% dei poligoni del campione potrebbe essere rimpiazzato dai rispettivi poligoni OBWP. L'analisi della distribuzione delle distanze tra i poligoni OBWP e OBHP permette di dedurre, per il campione in esame, che oltre 100.000 poligoni rappresentativi di manufatti (generalmente fabbricati) sono stati rilevati come poligoni praticamente convessi (variazione dell'area minore del 2%), mentre circa 5.900 poligoni originari propongono una differenza di area tra i rispettivi poligoni OBWP e OBHP maggiore del 34,8%, indicativa della presenza di concavità di una qualche consistenza nel rilievo del poligono originario.

Conclusioni

Nel presente lavoro si sono inizialmente individuate due particolari tipologie di poligoni ortogonali, gli *Orthogonal Bounded Wrapped Polygons* (OBWP) e gli *Orthogonal Bounded convex Hull Polygons* (OBHP), che approssimano i poligoni originari e si sono espresse le proprietà ed i predicati a cui soddisfano. Si è, quindi, introdotta una metrica, la *Normalized Area of Symmetric Differences* (NASD), che ha permesso di condurre un calcolo rigoroso della misura della distanza tra coppie di poligoni. L'attuale lavoro fornisce quindi un corredo completo, sia metodologico che algoritmico, per poter affrontare la tematica della ortogonalizzazione di poligoni semplici e la verifica della distanza tra i poligoni originali ed i rispettivi poligoni ortogonali tramite una metrica rigorosa. Il tutto con la garanzia che i poligoni ortogonali creati contengano sempre i poligoni originari e che i poligoni OBHP contengano sempre i rispettivi poligoni OBWP, ovvero vengano sempre rispettate le condizioni necessarie e sufficienti per poter garantire che specifici predicati una volta verificati sui poligoni ortogonali valgano anche per i rispettivi poligoni originari.

L'analisi condotta su di un campione di dati di sintesi vettoriali di elevata numerosità, relativi a 185.932 poligoni aventi forme prossime a quelle con le quali vengono descritti e/o rilevati i manufatti localizzati sul territorio, ha permesso di ordinare e classificare i poligoni originari sulla base di risultati ottenuti applicando la metrica NASD, evidenziando come oltre il 31% dei poligoni del campione propone una differenza di area rispetto ai relativi poligoni OBWP minore o uguale al 2%, e come oltre il 90% dei poligoni del campione propone una differenza di area rispetto ai relativi poligoni OBWP minore o uguale al 15%.

Gli sviluppi del presente lavoro includono sicuramente la possibilità di una ulteriore classificazione dei poligoni ortogonali OBWP in base alla loro forma confrontata rispetto a pattern predefiniti di forme ortogonali, ovvero rispetto ai cosiddetti *grid orthogonal polygons* (*grid n-gons*) [4]. Lo sviluppo di tale ulteriore classificazione, abbinata ad una banca dati di pattern di *grid n-gons* continuamente automaticamente aggiornata sulla base di sempre nuovi pattern individuati, permetterebbe di giungere ad una quasi pressoché automatica classificazione dei manufatti rilevabili su base territoriale e dotati di elevati parallelismi e perpendicolarità tra gli spigoli.

NOTA 1

La prima problematica da affrontare è quella di individuare gli spigoli del poligono originario che risultano tra di loro paralleli o perpendicolari. Cominciamo con l'osservare che dato un vettore u applicato nell'origine, un qualsiasi altro vettore v applicato nell'origine risulta essere parallelo o perpendicolare ad u se e solo se:

$$|\alpha_u - \alpha_v| = k \quad \text{con } k = 0 \text{ o multiplo di } 90 \quad (1)$$

in cui $0 \leq \alpha_u < 2\pi$ rappresenta l'angolo, orientato in verso antiorario ed espresso in gradi sessadecimali, compreso tra l'asse x ed il vettore u , e $0 \leq \alpha_v < 2\pi$ rappresenta l'angolo, orientato in verso antiorario ed espresso in gradi sessadecimali, compreso tra l'asse x ed il vettore v [cfr. Figura 10]

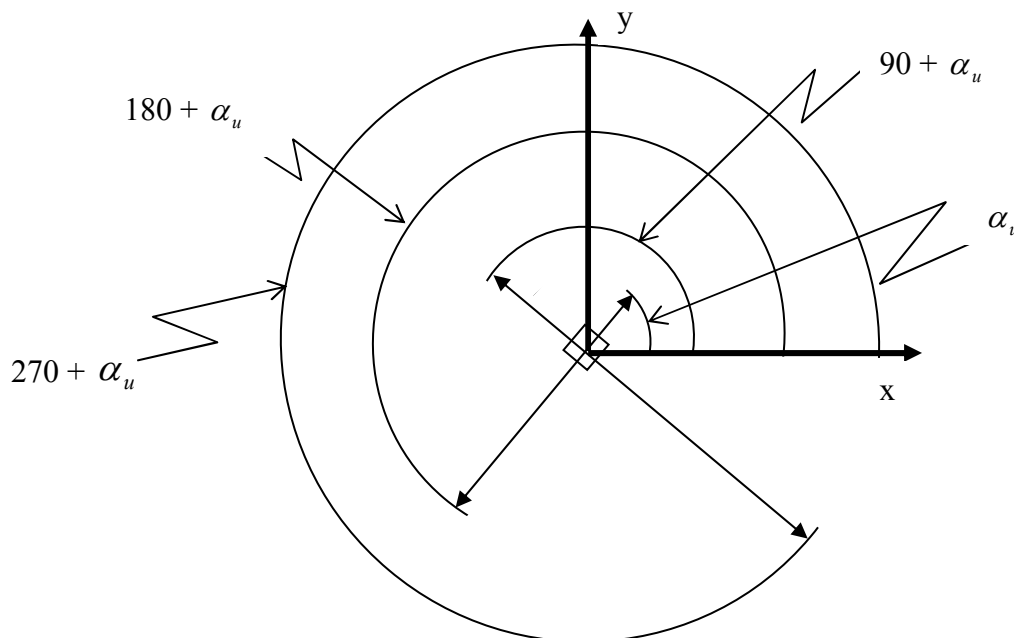


Figura 10 – gli angoli orientati in verso antiorario che l'asse x forma con quattro vettori applicati nell'origine tra loro perpendicolari e paralleli

Dalla (1) discende che dati gli angoli α_u ed α_v , orientati in verso antiorario ed espressi in gradi sessadecimali, che l'asse x forma con due vettori u e v applicati nell'origine, i due vettori risultano tra loro paralleli o perpendicolari se:

$$\alpha_u - \text{int}(\alpha_u / 90) * 90 = \alpha_v - \text{int}(\alpha_v / 90) * 90 \quad (2)$$

La (2) ci fornisce un metodo semplice per determinare il parallelismo e la perpendicolarità tra due vettori applicati nell'origine, comparandone gli angoli antiorari, ricondotti al primo quadrante, che l'asse x forma con i due vettori.

Il calcolo dell'angolo che l'asse x forma con un vettore e , rappresentativo del generico spigolo di un poligono orientato, può essere condotto tramite il calcolo del prodotto scalare tra i versori dei vettori x ed e , ovvero:

$$\text{vers}(\mathbf{x}) \bullet \text{vers}(\mathbf{e}) = \cos \vartheta_e \text{ da cui ne discende } \vartheta_e = \arccos(\vartheta_e) \quad (3)$$

in cui $0 \leq \vartheta_e \leq \pi$.

Poiché il prodotto scalare tra due vettori individua sempre l'angolo convesso compreso tra i due vettori, tale angolo risulta quello da noi cercato - ovvero l'angolo α_e orientato in verso antiorario che l'asse x forma con il vettore e - solamente quando il $\text{vers}(e)$ giace nel semipiano $y \geq 0$, ed in tal caso $\alpha_e = \vartheta_e$. Quando, viceversa, il $\text{vers}(e)$ giace nel semipiano $y < 0$ il prodotto scalare

individua l'angolo in verso orario che l'asse x forma con il vettore e , quindi l'angolo in verso antiorario da noi cercato è l'esplementare di quello individuato tramite il prodotto scalare, ovvero

$$\alpha_e = 360 - \vartheta_e \text{ [cfr. Figura 11]}. \quad (4)$$

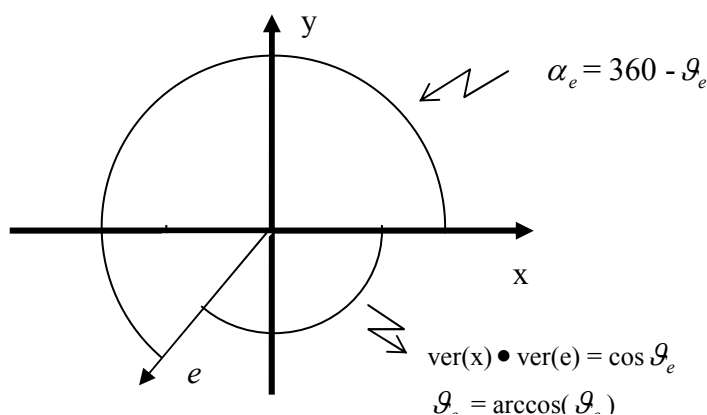


Figura 11 – il calcolo dell'angolo esplementare quando il vettore e giace nel semipiano $y < 0$

Dato un poligono piano p monociclico, orientato in verso antiorario, non intrecciato e composto di n spigoli, l'individuazione degli spigoli che risultano tra di loro paralleli e perpendicolari può quindi essere condotta calcolando per ciascuno spigolo, visto come un vettore orientato, l'angolo orientato in verso antiorario che l'asse delle x forma con esso (cfr. (3)) e verificando se tale angolo è quello cercato o ne deve essere considerato l'esplementare (cfr. (4)). Quindi tramite la (2) si individuano gli spigoli che risultano tra loro paralleli e perpendicolari e si sommano le relative lunghezze. L'angolo rispetto al quale la somma delle lunghezze è massima è quello rispetto al quale il poligono deve essere ruotato affinché risulti massima la somma delle lunghezze degli spigoli del poligono ruotato che risulteranno perpendicolari e paralleli agli assi coordinati. Infine individuato l'angolo α ottimale basterà ruotare il poligono originario p dell'angolo $-\alpha$ per orientarlo in modo tale giungere ad ottenere il relativo poligono OBWP che replichi, quanto più possibile, i parallelismi e le perpendicolarità tra gli spigoli già presenti nel poligono originale [cfr. figura 12].

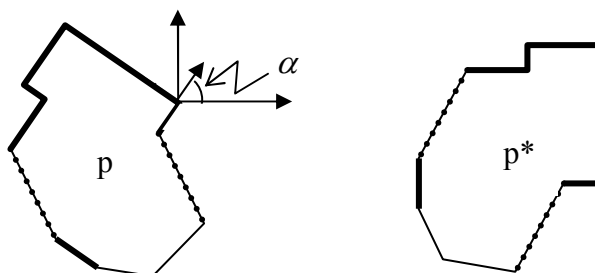


Figura 12 – p) il poligono originario supposto orientato in verso antiorario, con evidenziati gli spigoli tra loro paralleli e perpendicolari e l'angolo ottimale di rotazione α , già ricondotto al primo quadrante; p*) il poligono ruotato dell'angolo $-\alpha$.

La matrice $R(-\alpha)$ da applicarsi alle coordinate del poligono p originario, espresse come vettori riga in coordinate omogenee normalizzate, che realizza la rotazione desiderata [1] risulterà quindi:

$$R(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) & 0 \\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si noti, infine, come in presenza di un poligono originario privo di spigoli paralleli o perpendicolari venga individuato quale angolo ottimale di rotazione quello relativo allo spigolo di lunghezza maggiore, e come il criterio proposto tenda a trascurare piccoli disturbi casuali nella regolarità delle figure in quanto privilegia, ad esempio, un unico spigolo *lungo* (che non ha altri spigoli paralleli e perpendicolari) rispetto a numerosi spigoli *molto corti* ancorché tra loro perpendicolari e paralleli (purché ovviamente la somma delle lunghezze degli spigoli corti non ecceda quella dello spigolo lungo), spigoli molto corti sovente dovuti, nel caso di poligoni ottenuti da dati rilevati, da rumore e/o da imprecisione e/o da inaccuratezza nella loro presa.

NOTA 2

Si noti che il procedimento di ortogonalizzazione per giungere ad ottenere i poligoni OBWP opera in modo *locale* su ciascuno spigolo del generico poligono originario, ovvero opera rendendo ortogonale *localmente* ogni singolo spigolo non ortogonale del generico poligono originario [cfr. Figura 2]. Tale procedimento locale non è, quindi, in grado di globalmente *assorbire* eventuali consistenti concavità presenti nel poligono originario. I poligoni OBHP, viceversa, assolvono proprio tale funzione, ovvero permettono di assorbire/contenere le convessità *globalmente* presenti nel poligono originario, ciò in quanto il relativo procedimento di ortogonalizzazione opera sulla minima copertura convessa del poligono originario, ovvero su di un poligono originario reso globalmente convesso avendone *assorbito* le concavità. I poligoni OBHP risultano, quindi, generalmente più *semplificati* e più *compatti* rispetto ai corrispondenti poligoni OBWP, dovendo però talvolta, dipendentemente dalla consistenza delle concavità e dalla tipologia e dall'orientamento del bordo del poligono che le descrive, pagare lo scotto di proporre una elevata distanza sia dal poligono originario che dal poligono OBWP [cfr. Figura 3 - e) e Figura 13].

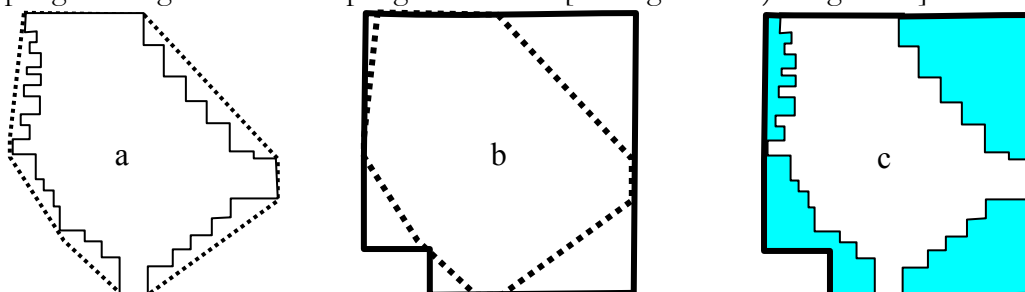


Figura 5 – a) il poligono p originario, supposto già totalmente ortogonale- quindi uguale al suo OBWP(p) - dotato di un bordo particolarmente frastagliato, con tratteggiata la sua minima copertura convessa; b) il poligono ortogonale OBHP(p) costruito sul convex-hull; c) ombreggiata la differenza tra il poligono OBHP(p) ed il poligono OBWP(p)

Solo qualora un poligono originario p fosse già tutto composto di spigoli tra loro perpendicolari e paralleli il suo corrispondente OBWP(p) risulterebbe essere uguale al poligono originario, e quindi la distanza $d(p,OBWP(p))$ risulterebbe essere pari a zero. Inoltre, solo nel caso di un poligono originario p totalmente privo di concavità, ovvero di un poligono originario convesso, i relativi poligoni OBWP(p) e OBHP(p) risulterebbero uguali e la loro distanza risulterebbe essere uguale a zero.

Bibliografia

- [1] Foley, van Dam, Feiner, Highes - *Computer Graphics - Principles and practice* - second edition - pp. 220-221 - Addison-Wesley, (1990)
- [2] Xu Yaowu, E. Saber, A.M. Tekalp – *Dynamic learning for multiple examples for semantic object segmentation and search* – Computer Vision and Image Understanding, Nro. 95, pp 334-353 – Elsevier, (2004)
- [3] V. Esperanca, H. Samet – *Orthogonal Polygons as Bounding Structures in Filter Refine Query Processing Strategies* – Proceeding of the 5th Symposium on Spatial Databases, SSD '97
- [4] A. P.Tomas, A.L.Bajuelos - *Generating Random Orthogonal Polygons* - Current Topics in Artificial Intelligence, Springer Berlin / Heidelberg, (2004)